

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală a județului Alba, 13 februarie 2015

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a XII-a

Problema 1.

Pe mulțimea $G = (0,2)$ definim legea de compoziție:

$$x \circ y = \frac{xy}{xy-x-y+2}, (\forall) x, y \in G.$$

- Să se arate că (G, \circ) este grup abelian.
- Să se arate că funcția $f: (0,2) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \frac{x}{2-x}$, este un izomorfism de grupuri de la grupul (G, \circ) la grupul (\mathbb{R}_+, \cdot) .
- Să se calculeze $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}}; x \in G, n \in \mathbb{N}^*.$
- Să se determine părțile stabile finite ale lui G în raport cu operația „ \circ ”.

Soluție și barem:

- Asociativitate, $(x \circ y) \circ z = \frac{xyz}{xy+xz+yz-2(x+y+z)+4} \dots\dots\dots 1p$
 - Elementul neutru $e = 1 \in G \dots\dots\dots 1p$
 - Simetricul elementului $x \in G, x' = 2 - x \in G \dots\dots\dots 1p$
- f bijectivă $\dots\dots\dots 1p$
 - $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y), (\forall) x, y \in G \dots\dots\dots 1p$
- Dacă $a_n = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{n \text{ ori}}$, atunci $f(a_n) = (f(x))^n = \frac{x^n}{(2-x)^n}$, de unde obținem

$$a_n = \frac{2x^n}{x^n + (2-x)^n} \dots\dots\dots 1p$$
- Dacă H este parte stabilă și $x \in H$, atunci $a_n \in H, (\forall) n \geq 1$ și cum H este finită, există $m < n$ astfel încât $a_m = a_n$; de aici $(f(x))^m = (f(x))^n$, de unde se obține $f(x) \in \{-1, 0, 1\}$. Convine doar $f(x) = -1$, de unde $x = 1$.
 În concluzie, singura parte stabilă finită este $H = \{1\} \dots\dots\dots 1p$

Problema 2.

Fie (G, \cdot) un grup de ordinul 2014 și f, g două endomorfisme ale sale, cu proprietatea că g este injectivă și $f(x) = g(x^3)$, pentru orice $x \in G$.

- Arătați că $(xy)^3 = x^3y^3, (\forall) x, y \in G$.
- Arătați că G este ciclic.

Soluție și barem:

- $g((xy)^3) = f(xy) = f(x)f(y) = g(x^3)g(y^3) = g(x^3y^3) \dots\dots\dots 2p$
 - g injectivă $\Rightarrow (xy)^3 = x^3y^3, (\forall) x, y \in G \dots\dots\dots 1p$
- $x(yx)^2y = x^3y^3$, de unde $(yx)^2 = x^2y^2, (\forall) x, y \in G \dots\dots\dots 1p$
 - $x^3y^3 = (xy)^3 = xy(xy)^2 = xyy^2x^2 \Rightarrow x^2y^3 = y^3x^2$, pentru orice $x, y \in G \dots\dots\dots 1p$
 - $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, deci există $a, b, c \in G$ având ordinele 2, 19 respectiv 53, deci

- $a^2 = e, b^{19} = e, c^{53} = e \Rightarrow a^3 = a, b^{20} = b, c^{54} = c$ 1p
- $b^2 a^3 = a^3 b^2 \Rightarrow b^{20} a = a b^{20} \Rightarrow ab = ba$; analog se obține $ac = ca, bc = cb$,
de unde obținem $ord(abc) = 2 \cdot 19 \cdot 53 = 2014$, deci G este ciclic 1p

Problema 3.

Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții derivabile care au proprietatea că funcția $f + 3g$ este o primitivă a funcției $2f - g$, iar funcția $5f - 6g$ este o primitivă a funcției $10f + 2g$.

- a) Arătați că $f'(x) - 2f(x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$.
b) Determinați funcțiile f și g .

Soluție și barem:

- a) • $\begin{cases} f'(x) + 3g'(x) = 2f(x) - g(x), (\forall) x \in \mathbb{R} \\ 5f'(x) - 6g'(x) = 10f(x) + 2g(x), (\forall) x \in \mathbb{R} \end{cases}$ 2p
- $f'(x) - 2f(x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{R}$ 1p
- b) • $\begin{cases} f'(x) - 2f(x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{R} \\ g'(x) + \frac{1}{3}g(x) = 0, (\forall) x \in \mathbb{R} \end{cases}$ 1p
- $\begin{cases} (f(x) \cdot e^{-2x})' = 0, (\forall) x \in \mathbb{R} \\ \left(f(x) \cdot e^{\frac{x}{3}}\right)' = 0, (\forall) x \in \mathbb{R} \end{cases}$ 2p
- În concluzie funcțiile căutate sunt $f(x) = a \cdot e^{2x}$ și $g(x) = b \cdot e^{-\frac{x}{3}}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$...1p

Problema 4.

Fie $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ și $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tg x)^n dx, n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$, unde $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă oarecare.
b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.
c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{K_n}$.

Soluție și barem:

- a) • f continuă $\Rightarrow f$ mărginită pe $[0,1] \Rightarrow mx^n \leq x^n f(x) \leq Mx^n, (\forall) x \in [0,1]$ 1p
- $\frac{m}{n+1} \leq \int_0^1 x^n f(x) dx \leq \frac{M}{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*,$ de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$... 1p
- b) • $nI_n = \int_0^1 (x^n)' x e^x dx = x^n e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 x^n e^x (x+1) dx = e - \int_0^1 x^n e^x (x+1) dx$.. 1p
- $\stackrel{a}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n e^x (x+1) dx = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = e$ 1p
- c) • $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{K_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nI_n}{nK_n} = \frac{e}{\lim_{n \rightarrow \infty} nK_n}$ 1p
- $K_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1} dt \Rightarrow nK_n = \int_0^1 (t^n)' \cdot \frac{t}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} - \int_0^1 t^n \cdot \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} dt$... 1p
- $\stackrel{a}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 t^n \cdot \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} dt = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} nK_n = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{K_n} = 2e$ 1p